**APROBADO**

Por Bernardo Cascales fecha 21:35 , 19/12/2011

# 1.2 Productos infinitos

B. Cascales

## Objetivos

- Demostrar que dado un conjunto discreto $M \subset \mathbb{C}$ existe una función entera con ceros sólo en $M$ y multiplicidades prescritas.
- Demostrar que cada función entera se factoriza en función de sus ceros.
- Encontrar la factorización de funciones clásicas.

## Productos infinitos de números complejos

### Definición

Sea $(a_n)_n$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Decimos que:

- el producto $\prod_{j=1}^{\infty} a_j$ es estríctamente convergente si existe $\lim_m \prod_{j=1}^{m} a_j = u \neq 0$. Definimos
$$\prod_{j=1}^{\infty} a_j := u.$$
- el producto $\prod_{j=1}^{\infty} a_j$ es convergente si para algún $m \in \mathbb{N}$ el producto infinito $\prod_{j=m+1}^{\infty} a_j$ es estrictamente convergente. En este caso el valor el producto
$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n := a_1 a_2 \dots a_m [\prod_{n=m+1}^{\infty} a_n],$$
donde el valor $\prod_{n=m+1}^{\infty} a_n$ ha sido definido como antes.

# Primeras propiedades de los productos infinitos

**Proposición**

Si $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente, entonces se cumple:

i) Para cada $n \geq 1$ el producto $\prod_{k=n+1}^{\infty} a_k =: \rho_n$ converge, y se verifica

$$a_1 a_2 \dots a_n \rho_n = \prod_{k=1}^{\infty} a_k$$

ii) $\lim_n \rho_n = 1$ y $\lim_n a_n = 1$

Dem.- ii) Solo demostramos el caso estrictamente convergente.

Si $0 \neq a = \prod_{j=1}^{+\infty} a_j$, por las definiciones involucradas se tiene

$$0 \neq a = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \cdot \rho_n =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} a_j \cdot \rho_n$$

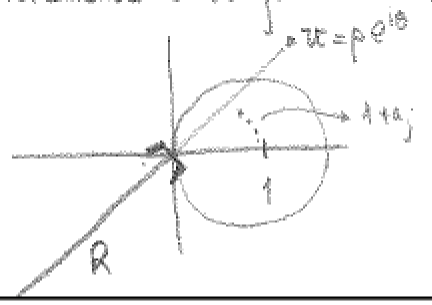
como $\prod_{j=1}^{n} a_j \longrightarrow a \curvearrowright \rho_n \longrightarrow 1.$

Por otro lado $\rho_{n-1} = a_n \cdot \rho_n \curvearrowright a_n \longrightarrow 1$ #

## Proposición

Una condición necesaria y suficiente para que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ sea estríctamente convergente es que $1+a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que la serie $\sum_{n\geq 1} \operatorname{Log}(1+a_n)$ sea convergente.

**Demostración.-** La condición suficiente es inmediata: es la continuidad de la exponencial. Demostremos la condición necesaria para un producto estrictamente convergente $0 \neq u = \prod_{j=1}^{+\infty}(1+a_j)$



Notemos que:

1.- podemos suponer $1+a_j \in \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z>0\}$.

2.- Fijemos $\theta = \operatorname{Arg}(u) \in (-\pi, \pi]$

3.- Consideremos $A : \mathbb{C}\setminus R \longrightarrow (\theta-\pi, \theta+\pi)$ un argumento de la identidad, continuo

12.

Si llamamos $\pi_n = \prod_{j=1}^{n}(1+a_j) \longrightarrow u$ y por lo tanto, suponiendo $\pi_n \in \mathbb{C}\setminus R$

$$\theta_n = A(\pi_n) \longrightarrow A(u) = \theta \in (\theta-\pi, \theta+\pi)$$

Así, si ponemos

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Log}(1+a_j) \curvearrowright e^{S_n} = \pi_n = e^{\operatorname{Log}|\pi_n| + i\theta_n}$$

$$\curvearrowright \quad S_n = \operatorname{Log}|\pi_n| + i\,\theta_n + i\,2\pi\, h(n) \quad \text{para algun } h(n) \in \mathbb{Z} \quad \text{así,}$$

$$\operatorname{Log}(1+a_{n+1}) = S_{n+1} - S_n = \operatorname{Log}|1+a_{n+1}| + i(\theta_{n+1}-\theta_n) + 2\pi i\,(h(n+1)-h(n)) \curvearrowright$$

se sigue que:

$$2\pi i\,(h(n+1)-h(n)) = \operatorname{Log}(1+a_{n+1}) - \operatorname{Log}|1+a_{n+1}| + i(\theta_n - \theta_{n+1}) \rightarrow$$

$$\rightarrow 0 - 0 + i(\theta-\theta) = 0.$$

Así, para $n$ suficientemente grande, $\overset{n\geq n_0}{h_{n+1} = h_n} \curvearrowright h_n = cte \in \mathbb{Z}$, y por lo tando

$$S_n \longrightarrow \operatorname{Log}|u| + i\theta + 2\pi i\, cte,$$

y así queda terminada la prueba. ≠

## Proposición

Dado un producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ son equivalentes:

- i) $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < +\infty$;
- ii) existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n\geq m}|Log(1+a_n)| < +\infty$;
- iii) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ converge.

Cada una de estas condiciones implica que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ es convergente.

__Demostración__.- La coletilla se sigue de la proposición anterior. Teniendo en cuenta que cualquiera de las tres condiciones (i), (ii), (iii) implica $a_j \xrightarrow{} 0$: ahora (ii) $\Rightarrow \sum_{j=m}^{+\infty} \text{Log}(1+a_j)$ y por tanto el producto converge.

Observemos $\lim_{z\to 0} \frac{\text{Log}(1+z)}{z} = 1$ así existe $\delta>0$ t.q.

$$|z|\leq\delta \curvearrowright \frac{1}{2}\leq\left|\frac{\text{Log}(1+z)}{z}\right|\leq 3/2 \underset{|z|\leq\delta}{\curvearrowright} \frac{1}{2}|z|\leq|\text{Log}(1+z)|\leq \frac{3}{2}|z|,$$

$$j\geq m_0 \underset{\text{entonces}}{\curvearrowright} |a_j|\leq\delta \qquad \frac{1}{2}|a_j|\leq|\text{Log}(1+a_j)|\leq\frac{3}{2}|a_j|$$

con lo que (i) y (ii) son equivalentes

Por otro lado, si lo que acabamos de demostrar se lo aplicamos $\prod_{j=1}^{+\infty}(1+|a_j|)$ se obtiene que $(i) \Leftrightarrow \sum_{j\geq m} \text{Log}(1+|a_j|)<+\infty \underset{\text{prop anterior}}{\Longleftrightarrow} \prod_{j=m}^{+\infty}(1+|a_j|)$ convergente #

## Definición

El producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ se dice que es absolutamente convergente cuando se cumple alguna de las tres condiciones equivalentes de la proposición anterior.

**Definición**

Sea $K$ un conjunto y $u_n : K \longrightarrow \mathbb{C}$, una sucesión de funciones.

i) Si el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ converge para cada $z \in K$ se dice que el producto infinito converge puntualmente en $K$.

ii) Si además la sucesión $\rho_n(z) = \prod_{j=n+1}^{\infty} u_j(z)$ converge uniformemente sobre $K$ hacia 1 se dice que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ converge uniformemente sobre $K$.

**Proposición**

Sea $K$ un conjunto y $a_n : K \longrightarrow \mathbb{C}$ una sucesión de funciones. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(z)|$ converge uniformemente para $z \in K$;

ii) $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + |a_n(z)|)$ converge uniformemente para $z \in K$

Cualquiera de las condiciones anteriores implica que

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n(z))$$

converge uniformemente para $z \in K$.

<u>Demostración.</u>- $x \geq 0$ se tiene $1 + x \leq e^x$. Tomando $0 < x_{m+1}, \dots, x_n$

$$\prod_{j=m+1}^{n} (1 + x_j) \leq e^{\sum_{j=m+1}^{n} x_j}$$

Por lo tanto tendremos,

$$\sum_{j=m+1}^{n} |a_j(z)| \leq \prod_{j=m+1}^{n} (1 + |a_j(z)|) - 1 \leq e^{\sum_{j=m+1}^{n} |a_j(z)|} - 1.$$

Si llamamos $\rho_m^*(z) = \prod_{j=m+1}^{\infty} (1 + |a_j(z)|)$

ii) $\Rightarrow$ i) $\sum_{j=m+1}^{+\infty} |a_j(z)| \leq \rho_m^*(z) - 1 \longrightarrow 0$ uniform. en $K$.

i) $\Rightarrow$ ii) $\sum_{j=1}^{+\infty} |a_j(z)|$ converge uniformemente en $K \rightsquigarrow \sum_{j=m+1}^{\infty} |a_j(z)| \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$ unif. en $K$

$$\rho_m^*(z) - 1 \leq e^{\sum_{j=m+1}^{\infty} |a_j(z)|} - 1 \xrightarrow[m \to \infty]{} 0 \quad \text{unif. en } z \in K.$$

Si suponemos ahora (ii) observamos que

$$\left| \prod_{j=m+1}^{n} (1 + a_j(z)) - 1 \right| \leq \prod_{j=m+1}^{n} (1 + |a_j(z)|) - 1$$

$$|\rho_m(z) - 1| \leq \rho_m^*(z) - 1 \longrightarrow 0 \quad \text{unif en } K \qquad \#$$

## Proposición

Sea $K$ un espacio compacto y $u_j : K \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones continuas. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

i) $\prod_{j=1}^{\infty} u_j$ converge uniformemente sobre $K$.

ii) Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\prod_{j=m}^{\infty} u_j(z) \neq 0$ para cada $z \in K$ y $\prod_{j=m}^{n} u_j$ converge uniformemente sobre $K$ hacia $\prod_{j=m}^{\infty} u_j$ cuando $n \to \infty$.

$j=m+1$

<u>Demostración</u>.-

i) ⇒ ii) $\rho_m(z) = \prod_{j=n+1}^{+\infty} u_j(z) \longrightarrow 1$ unif. en $z \in K$ ⇝ $\exists\, m \in \mathbb{N}$ t.q. $n \geq m$ se tiene $|\rho_n(z) - 1| < 1/2$ para cada $z \in K$

⇝ $\rho_m(z) = \prod_{j=m+1}^{+\infty} u_j(z) \neq 0$ para cada $z \in K$. Por otro lado, para $n \geq m+1$

$$\left|\prod_{j=m+1}^{n} u_j(z) - \prod_{j=m+1}^{+\infty} u_j(z)\right| = \left|\prod_{j=m+1}^{n} u_j(z)\right| \left|1 - \rho_n(z)\right|$$

si vemos que $\left(\prod_{j=m+1}^{n} u_j(z)\right)_n$ está acotado, la prueba terminará. Ahora bien.

$$\left|\prod_{j=m+1}^{n} u_j(z)\right| = \left|\frac{\rho_m(z)}{\rho_n(z)}\right| \leq \frac{3/2}{1/2} = 3 \quad \text{para } n \geq m+1,\ \forall z \in K.$$

ii) ⇒ i) Si se cumple ii) $\rho_m(z) = \prod_{j=m+1}^{+\infty} u_j(z)$ es continua. $\neq 0$ podemos tomar $0 < \delta = \min\{|\rho_m(z)| : z \in K\}$. y así para $n > m$ tenemos

$$|\rho_n(z) - 1| = \left|\prod_{j=n+1}^{+\infty} u_j(z) - 1\right| = \frac{1}{\left|\prod_{j=m+1}^{n} u_j(z)\right|} \left|\prod_{j=m+1}^{+\infty} u_j(z) - \prod_{j=m+1}^{n} u_j(z)\right| \leq$$

$$\leq \frac{2}{\delta} \left|\rho_m(z) - \prod_{j=m+1}^{n} u_j(z)\right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$\left|\prod_{j=m+1}^{n} u_j(z) - \rho_m(z)\right| < \delta/2 \quad \forall z \in K,\ n > m \quad ⇝ \quad \left|\prod_{j=m+1}^{n} u_j(z)\right| > \delta/2.$$

… #

## 17/Octubre/2006: Prod. infinitos funciones holomorfas

### Corolario

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto. Si $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ es un producto infinito de funciones continuas $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ que converge uniformemente sobre compactos de $\Omega$ hacia $f = \prod_{n=1}^{\infty} f_n$, entonces:

i) la sucesión de los productos parciales $\pi_n = f_1 f_2 f_3 \dots f_n$ converge uniformemente sobre compactos de $\Omega$ hacia $f$;

ii) $f$ es continua;

iii) para cada compacto $K \subset \Omega$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$ entonces $Z(f_n) \bigcap K = \Phi$.

Demostración.-

(i) Fijemos $K \subset \Omega$ compacto. De acuerdo a la proposición anterior existe $m \in \mathbb{N}$ t.q. $\prod_{j=m+1}^{n} f_j \longrightarrow \prod_{j=m+1}^{+\infty} f_j$ uniformemente en $K$.

Así, como $f_1, f_2, \dots, f_m$ están uniformemente acotadas en $K$, se tiene que

$$f_1 \cdot f_2 \cdots f_m \cdot \prod_{j=m+1}^{n} f_j \longrightarrow f_1 \cdots f_m \cdot \prod_{j=m+1}^{+\infty} f_j$$

uniformemente en $K$.

(ii) Como $\Omega \subset \mathbb{C}$ es localmente compacto, y cada producto finito $\left(\prod_{j=1}^{n} f_j\right)$ es continuo, su límite uniforme sobre compactos $f$ es continua.

(iii) Fijado $K \subset \Omega$ compacto, de acuerdo a la proposición anterior, existe $m$ tal que $\prod_{j=m+1}^{+\infty} f_j(z) \neq 0$ para cada $z \in K$ #

Llegamos a la siguiente definición que involucra ahora productos infinitos de funciones holomorfas.

### Definición

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y sea $(f_n)_n$ una sucesión en $\mathscr{H}(\Omega)$. Decimos que el producto infinito $\prod_{j=1}^{\infty} f_j$ converge uniformemente sobre compactos de $\Omega$, si $\prod_{j=1}^{\infty} f_j$ converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega$.

Observemos que de acuerdo a lo estudiado anteriormente, la condición suficiente natural para garantizar convergencia de productos viene dada por:

### Observación

- Una condición suficiente para que el producto $\prod_{j=1}^{\infty} f_j$ converja uniformemente sobre compactos de $\Omega$ es que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z) - 1|$$

sea uniformemente convergente sobre cada compacto $K \subset \Omega$.

El ejercicio que sigue pone de manifiesto como utilizar la condición suficiente dada en la observación:

### Ejercicio

Pruébese que se tiene

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + z^{2^n}) = \frac{1}{1-z},$$

para cada $|z| < 1$, donde el producto infinito converge uniformemente sobre compactos del disco unidad.

Resolución: si $|z| \leq r < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} |z^{2^n}| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} r^{2^n} \rightsquigarrow$ La serie converge absoluta y uniformemente en $|z| \leq r$, y así el producto también.

Como $0 < r < 1$ es arbitrario, obtenemos que el producto converge uniform. sobre compactos $K \subset D(0,1)$. Conociendo que el producto converge calculamos ahora los productos parciales y tomamos límites:

$$\pi_0 = 1 + z$$

$$\pi_1 = (1+z)(1+z^2) = 1 + z + z^2 + z^3$$

$$\pi_2 = (1+z+z^2+z^3)(1+z^4) = 1+z+z^2+z^3+ \cdot \quad + z^7 \qquad (7 = 2^{2+1} - 1)$$

$$\dots$$

$$\pi_n = 1 + z + \dots + z^{2^{n+1}-1} \longrightarrow \frac{1}{1-z} \quad \text{si } |z| < 1 \quad \#$$

**Teorema**

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y sea $(f_n)_n$ una sucesión en $\mathscr{H}(\Omega)$ tal que el producto $f := \prod_{j=1}^{\infty} f_j$ converge uniformemente sobre compactos de $\Omega$. Entonces:

i) La función definida por el producto $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z), z \in \Omega$, es holomorfa en $\Omega$;

ii) $\mathscr{Z}(f) = U_n \mathscr{Z}(f_n)$.

iii) si $\mathscr{Z}(f_n)' \cap \Omega = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $\mathscr{Z}(f)' \cap \Omega = \emptyset$ y para cada $a \in \mathscr{Z}(f)$, $\{n \in \mathbb{N} : f_n(a) = 0\}$ es finito y

$$m(f, a) = \sum_n m(f_n, a).$$

Demostración.- (i) Como los productos finitos $\pi_n = \prod_{j=1}^{n} f_j \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\pi_n \longrightarrow f$ uniformemente sobre compactos, concluimos por el T$^{\underline{ma}}$ de Weierstrass que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

ii) Es clara la inclusión $\mathscr{Z}(f) \supset \bigcup_n \mathscr{Z}(f_n)$. Recíprocamente, si $a \in \mathscr{Z}(f)$ tomando $K = \{a\} \subset \Omega$ compacto existe $m \in \mathbb{N}$ t.q. $\prod_{j=m+1}^{+\infty} f_j(a) \neq 0$.
Así $0 = f(a) = f_1(a) \cdot f_2(a) \cdot \dots \cdot f_m(a) \cdot \prod_{j=m+1}^{+\infty} f_j(a)$. De aquí se

deduce que $f_j(a)=0$ para algún $j\in\{1,2,\dots,m\}$.

iii) Procedemos como en el apartado ii) si $f(a)=0$, con $a\in\Omega$, podemos tomar $r>0$ tal que $K=\overline{D(a,r)}\subset\Omega$. Sabemos, de nuevo que para algún $m\in\mathbb{N}$ se tiene $\prod_{j=m+1}^{+\infty} f_j(z)\neq 0$ para cada $z\in K$. Así de la igualdad

$$f(z) \overset{z\in\overline{D(a,r)}}{=\!=\!=} f_1(z)\cdots f_m(z)\cdot\prod_{j=m+1}^{+\infty} f_j(z) \quad [*]$$

se deduce que si $f$ vuelve a anularse $w\in\overline{D(a,r)}$, entonces necesariamente se tiene $f_1,\dots,$ ó $,\dots f_m$ se anulan en $w$: por lo tanto como $Z(f_j)\cap\overline{D(a,r)}=\{\text{finito}\}$, $j=1,2,\dots,m$, deducimos que

$$Z(f)\cap\overline{D(a,r)}=\{\text{finito}\}$$

y por lo tanto $f$ tiene en $\underline{\underline{a}}$ un cero aislado. La factorización [*] nos dice también que

$$m(a,f)=\sum_{n\in\mathbb{N}} m(a,f_n)$$

donde claramente la suma involucrada es de soporte finito. #

El lema que sigue es fundamental para demostrar el $T^{\underline{ma}}$ Weierstrass.

**Lema (Weierstrass)**

Definamos

$$E_0(z)=1-z;$$

$$E_n(z)=(1-z)e^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^n}{n}},\ n\geq 1.$$

Entonces, para $|z|\leq 1$ se tiene

$$|E_n(z)-1|\leq |z|^{n+1}.$$

**FINAL**

Demostración.- Para $n=0$, La tesis es clara. Tomemos $p \in \mathbb{N}$ arbitrario

- ✓ $E_p(0)=1$
- ✓ Podemos escribir $E_p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k z^k \qquad z \in \mathbb{C}.$
- ✓ Atendiendo a la expresión de $E_p$ y derivando a ambos lados de la igualdad anterior obtenemos

$$-e^{z+z^2/2+\cdots+z^p/p} + (1-z)\, e^{z+z^2/2+\cdots+z^p/p}(1+z+\cdot+z^{p-1}) =$$

$$= -e^{z+z^2/2+\cdots+z^p/p} + (1-z^p)\, e^{z+\cdots+z^p/p} =$$

$$= -z^p e^{z+\cdots+z^p/p} \doteq \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z^{k-1}. \qquad z \in \mathbb{C}$$

De la igualdad anterior se sigue que:

$a_k = 0$ si $1 \leq k \leq p$

$a_k < 0$ si $k \geq p+1$

De lo anterior tenemos que

$$0 = E_p(1) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 1 - \sum_{k=p+1}^{+\infty} |a_k|$$

Por lo tanto, tenemos

$$|E_p(z) - 1| = \left| \sum_{k=p+1}^{+\infty} a_k z^k \right| \underset{|z|\leq 1}{\leq} |z|^{p+1} \sum_{k=p+1}^{+\infty} |a_k| = |z|^{p+1} \#$$

**Definición**

A las funciones $E_n$, $n = 0, 1, \ldots$, del lema anterior se les llama *factores elementales de Weierstrass.*

Con ayuda del lema de Weierstrass, llegamos a:

**Teorema Weierstrass-1**

Sea $a_k$ una sucesión de números complejos tal que $a_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $|a_k| \to +\infty$. Sea $n_k \in \mathbb{N}$ una sucesión tal que $\sum_{k=1}^{\infty}(R/|a_k|)^{n_k+1} < +\infty$ para cada $R > 0$ (p.e. $n_k = k-1$). Entonces el producto infinito

**FINAL**

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k}\left(\frac{z}{a_k}\right)$$

define una función entera $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$, tal que cada $a_k$ es un cero de $f$, y $f$ no tiene otros ceros. Más precisamente, si $a \in \mathbb{C}$ aparece $m$ veces en la sucesión $a_k$ entonces $a$ es un cero de $f$ de multiplicidad $m$.

Demostración.- Observamos primero que si $|a_k| \longrightarrow +\infty$, entonces para $R>0$ fijo $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(R/|a_k|\right)^k < \infty$: ciertamente, si tomamos $m \in \mathbb{N}$ t.q. $k \geq m \curvearrowright R/|a_k| < 1/2 \curvearrowright \sum_{k\geq m}\left(R/|a_k|\right)^k \leq \sum_{k\geq m}\left(1/2\right)^k < +\infty$

Supongamos que $(n_k)_k$ es una sucesión arbitraria que garantiza $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(R/|a_k|\right)^{n_k+1} < +\infty$,

y estudiemos la convergencia del producto infinito en $\overline{D(0,R)}$ vía la serie $\sum |1 - E_{n_k}(z/a_k)|$. Tenemos:

$$|1 - E_{n_k}(z/a_k)| \underset{㊀}{\overset{\text{si } |z|\leq R}{\leq}} \left|z/a_k\right|^{n_k+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{si } |z|\leq R}}{\leq} \left(\frac{R}{|a_k|}\right)^{n_k+1}$$

㊀ podemos garantizarlo por el Lema, si $m$ ha sido tomado de forma que $k \geq m \curvearrowright R/|a_k| < 1/2$.

El resto de las tesis del teorema son consecuencias inmediatas de las proposiciones que hemos demostrado hasta ahora. #

**Observación**

- Los $n_k$ pueden tomarse cualesquiera con tal de que la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(R/|a_k|)^{n_k+1} < +\infty$ para cada $R > 0$.
- En una situación concreta si queremos para $(a_n)$ producir una función $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ con $f(a_n) = 0$ y $m(a_n, f) = m_n$, $n \in \mathbb{N}$, lo que hacemos es fabricar la sucesión

  $$a_1, \dots, a_1, a_2, \dots, a_2, \dots = z_1, z_2, \dots,$$

  donde cada $a_j$ se repite $m_j$ veces y utilizar el Teorema anterior con $z_n$.
- En la situación anterior si $(m_n)$ está acotada y $\sum_n \frac{1}{|a_n|^p} < \infty$, es suficiente tomar $n_k = p - 1$.

Sólo comentamos la última observación las demás son claras. Si hemos repetido

$$\begin{array}{l} a_1, \overset{m_1}{\overset{\smile}{\dots}}, a_1, a_2, \overset{m_2}{\overset{\smile}{\dots}}, a_2, \dots, a_k, \overset{m_k}{\overset{\smile}{\dots}}, a_k, \dots \\ \overset{\shortparallel}{z_1}, \overset{\shortparallel}{z_2}, \dots, \overset{\shortparallel}{z_{m_1}}, \overset{\shortparallel}{z_{m_1+1}}, \dots \end{array}$$

y tenemos que $m_n \leq N$, $n \in \mathbb{N}$, entonces para $n_k = p-1$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left|\frac{R}{z_k}\right|^{n_k+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left|\frac{R}{z_k}\right|^{p} \leq N \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{R^p}{|a_k|^p} < +\infty$$

#

### Teorema Weierstrass-2

Sea $M \subset \mathbb{C}$ tal que $M' = \emptyset$. Si para cada $a \in M$ le asignamos un natural $m(a) \in \mathbb{N}$, entonces existe $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tal que $\mathscr{Z}(f) = M$ y cada $a \in \mathscr{Z}(f)$ tiene multiplicidad $m(a)$.

**FINAL**

Demostración.- Si $M = \{a_1, a_2 \ldots, a_n\}$ es finito

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \\ m_1 & m_2 & & m_n \end{array} \qquad (m_j := m(a_j))$$

fabricamos el polinomio

$$f(z) = (z-a_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (z-a_n)^{m_n}$$

Si $M$ es infinito, lo escribimos en sucesión

$$\begin{array}{cccccc} a_0, & a_1, & a_2, & \ldots, & a_k, & \ldots \\ | & | & | & & | & \\ m_0 & m_1 & m_2 & & m_k & \end{array}$$

$|a_j| \nearrow +\infty \quad a_j \neq 0$

$j = 1, 2, \ldots$

con $a_0 = 0$, si es que $0 \in$

Entonces fabricamos

$$z^{m_0} \cdot \prod_{k=1}^{+\infty} E_{n_k}\left(\frac{z}{z_k}\right)$$

donde la sucesión de los $z$, se obtiene

$$\begin{array}{cccccccccc} a_0, & a_1, & a_1, & \overset{m_1}{\smile}\ldots, & a_1, & a_2 & a_2, & \overset{m_2}{\smile}\ldots & a_2, & \ldots \\ & | & | & & | & | & | & & | & \\ & z_0 & z_1 & z_2 & z_{m_1} & \ldots & & \ldots & & \end{array}$$

#

**Teorema Factorización Weierstrass**

Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ y

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$$

la sucesión de sus ceros no nulos, repetidos según multiplicidades. Si $m_0 = 0, 1, \ldots$ es la multiplicidad de 0 como cero de $f$, entonces existe una sucesión $n_k \in \mathbb{N}$ y una función entera $g \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$ tal que

$$f(z) = z^{m_0} e^{g(z)} \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k}\left(\frac{z}{z_k}\right).$$

**FINAL**

Dem.- Tomamos $n_k$ como en el Teorema Weierstrass-1 y ponemos

$$h(z) = z^{m_0} \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k}\left(\frac{z}{z_k}\right).$$

Las funciones $f$ y $h$ tienen los mismos ceros con las mismas multiplicidades. Así si consideramos el cociente

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{h(z)} \qquad \varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus Z(f))$$

qui tiene singularidades evitables en $a \in Z(f)$. Observemos que si evitamos las singularidades, podemos considerar $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ con $\varphi(z) \neq 0$ para cada $z \in \mathbb{C}$. Por lo tanto, $\varphi$ tiene un logaritmo i.e. existe $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ t.q. $e^{g(z)} = \varphi(z)$. Hemos demostrado por tanto que

$$f(z) = e^{g(z)} h(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

y con esto acaba la prueba.

**Ejercicio**

Pruébese que

$$\sin \pi z = z e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \text{ donde } g \in \mathscr{H}(\mathbb{C}).$$

Res.- sen $\pi z$ tiene ceros simples en $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots$

Consideremos $1, 2, \ldots\ldots, n, \ldots$ Observemos que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$.

De acuerdo a la OBSERVACIÓN anterior el producto

$$h_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_1\left(\frac{z}{n}\right)$$

converge uniformemente sobre compactos y define una función holomorfa con ceros simples en $1, 2, \ldots, n, \ldots$

Por el mismo argumento

$$h_2(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} E_1\left(\frac{z}{-n}\right)$$

define una función holomorfa con ceros simples en $-1, -2, \ldots, -n, \ldots$

Así, de acuerdo al Teorema de factorización,

$$\operatorname{sen} \pi z = z \cdot e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_1\left(\frac{z}{n}\right) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} E_1\left(\frac{z}{n}\right) =$$

$$= z \cdot e^{g(z)} \lim_{m} \prod_{n=1}^{m} (1 - z/n)\, e^{z/n} (1 + z/n)\, e^{-z/n} =$$

$$= z \cdot e^{g(z)} \lim_{m} \prod_{n=1}^{m} \left(1 - z^2/n^2\right) = z \cdot e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - z^2/n^2\right). \quad \#$$

Hemos de notar que en las factorizaciones como la realizada en el ejercicio anterior la cuestión es:

① Encontrar los $n_k$ cuanto más sencillos mejor.

② Determinar la $\underline{\underline{g}}$.

Para determinar la $\underline{\underline{g}}$ la siguiente proposición puede ayudar.

## Proposición

Sea $f_n \in \mathscr{H}(\Omega)$ una sucesión tal que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente sobre compactos y tal que $\mathscr{Z}(f_n)' \cap \Omega = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces la serie de funciones meromorfas $\sum_{n=1}^{\infty}(f_n'/f_n)$ converge unif. sobre compactos y $\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}$

Demostración.- Vamos a ver que $\sum_n f_n'/f_n$ converge en $\mathcal{M}(\Omega)$ y que su suma es $f'/f$.

- Observamos primero que como $\mathcal{Z}(f_n)' \cap \Omega = \phi \ \forall n \rightsquigarrow \mathcal{Z}(f)' \cap \Omega = \phi$.
- Así, $f_n'/f_n$ y $f'/f$ son funciones meromorfas en $\Omega$.
- Como el producto converge unif sobre compactos, los restos

$$\rho_n(z) = \prod_{j=n+1}^{\infty} f_j(z) \longrightarrow 1 \text{ unif sobre compactos}$$

- Dado $K \subset \Omega$ compacto, $\exists\, m \in \mathbb{N} : n \geq m \rightsquigarrow |\rho_n(z) - 1| < 1/2$ $\rightsquigarrow \rho_m(z) \neq 0$ para cada $z \in K \rightsquigarrow \mathcal{Z}(f_n) \cap K = \phi$ para cada $n \geq m \rightsquigarrow$ Polos$\left(f_n'/f_n\right) \cap K = \phi$ $n \geq m$.

  Por otra parte

$$\frac{\rho_n'}{\rho_n} \longrightarrow \frac{0}{1} = 0 \quad \text{unif. en } K$$

  Así, para $n \geq m$ tenemos

$$\frac{\rho_m'(z)}{\rho_m(z)} = \frac{f_{m+1}'(z)}{f_{m+1}(z)} + \cdots + \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} + \overset{=0 \text{ unif en } K}{\cancel{\frac{\rho_n'(z)}{\rho_n(z)}}} \rightsquigarrow \sum_{j=m+1}^{+\infty} \frac{f_j'(z)}{f_j(z)} = \frac{\rho_m'(z)}{\rho_m(z)} \quad \text{unif en } K.$$

- Así hemos probado que $\sum_n f_n'/f_n$ converge en $\mathcal{M}(\Omega)$
- Además, para cada $z \notin \mathcal{Z}(f)$ se tiene

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{f_j'(z)}{f_j(z)} + \overset{=0}{\cancel{\frac{\rho_n'(z)}{\rho_n(z)}}}$$

, y así queda probada la fórmula. #

## Ejercicio-continuación

Pruébese que

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2}).$$

Resolución .- Por el ejercicio anterior sabemos que

$$\text{sen}\,\pi z = z \cdot e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2}) \quad \circledast$$

Así, haciendo la derivada logarítmica tenemos:

$$\frac{(\text{sen}\,\pi z)'}{(\text{sen}\,\pi z)} = \pi \,\text{cotg}\, \pi z = \frac{1}{z} + g'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{2z}{n^2}}{1 - \frac{z^2}{n^2}} =$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} + g'(z) = \pi \,\text{cotg}\, \pi z + g'(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

$$\rightsquigarrow g'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \rightsquigarrow g(z) = cte \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Así, sustituyendo en $\circledast$ se queda

$$\text{sen}\,\pi z = z\, e^{cte} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2}) \rightsquigarrow$$

$$\pi \quad \frac{\text{sen}\,\pi z}{\pi z} = e^{cte} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2}) \xrightarrow{z \to 0} \pi = e^{cte}$$

y así se obtiene la factorización.

$\#$

**Ejercicio**

Si $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|) < +\infty$, entonces el producto infinito, $\alpha_n \in D(0,1)$

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\left(\frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n}z}\right),$$

converge uniformemente sobre compactos en $D(0,1)$ donde define una función acotada $f \in \mathscr{H}(D(0,1))$ cuyos ceros son $\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Resolución:

$$\left|1 - \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\left(\frac{\alpha_n - z}{1-\alpha_n z}\right)\right| = \left|\frac{\alpha_n(1-\alpha_n z) - |\alpha_n|(\alpha_n - z)}{\alpha_n(1-\overline{\alpha}_n z)}\right| =$$

$$= \left|\frac{\alpha_n - |\alpha_n|^2 z - |\alpha_n|\alpha_n + |\alpha_n| z}{\alpha_n(1-\overline{\alpha}_n z)}\right| = \left|\frac{\alpha_n(1-|\alpha_n|) + |\alpha_n| z(1-|\alpha_n|)}{\alpha_n(1-\overline{\alpha}_n z)}\right| \le$$

$$\underset{|z|<1}{\le} \frac{|\alpha_n|(1-|\alpha_n|) + |\alpha_n||z|(1-|\alpha_n|)}{|\alpha_n||1-\overline{\alpha}_n z|} \underset{|z|<1}{\le} \frac{1+|z|}{1-|z|}(1-|\alpha_n|)$$

$$|\alpha_n z| \le |z| \qquad |1-\overline{\alpha}_n z| \ge |1-|\overline{\alpha}_n z|| > 1-|z|$$

Así, si $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|\alpha_n|) < +\infty$, entonces para $|z| \le r < 1$

la serie $\left|1 - \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\left(\frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha}_n z}\right)\right| \le \frac{1+r}{1-r}(1-|\alpha_n|) \curvearrowright$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\frac{(z-\alpha_n)}{1-\overline{\alpha}_n z}\right)$ converge unif. sobre compactos. $D(0,1)$

El resto es rutina. #